Доклады Национальной академии наук Беларуси
2015 май–июнь Том 59 № 3

УДК 517.926.4

С. Г. КРАСОВСКИЙ

ИЗМЕНЕНИЕ ЗНАКА ЦЕНТРАЛЬНОГО И ОСОБОГО ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ СИСТЕМ

(Представлено академиком Н. А. Изобовым)

Институт математики НАН Беларуси, Минск *Поступило 15.12.2014*

Рассматриваем сингулярные линейные дифференциальные системы: исходную

$$\varepsilon\dot{x} = A(t)x,\ \ x \in \mathbb{R}^n,\ \ \varepsilon \in (0,1],\ \ t \geq 0,\ \ n \geq 2, \tag{$1_{A/\varepsilon}$}$$

с кусочно-непрерывной ограниченной матрицей коэффициентов $A(t)$, совокупностью характеристических показателей (характеристической совокупностью) $\lambda(A / \varepsilon) \equiv (\lambda_1(A / \varepsilon), \ldots, \lambda_n(A / \varepsilon)) \in \mathbb{R}^n$ и возмущенную

$$\varepsilon\dot{y} = A(t)y + Q(t)y,\ \ y \in \mathbb{R}^n,\ \ \varepsilon \in (0, 1],\ \ t \geq 0, \tag{$1_{(A+Q)/\varepsilon}$}$$

с достаточно малыми возмущениями $Q(\cdot)$, имеющими норму $\sup\limits_{t \geq t_\delta \geq 0} \| Q(t) \| \leq \delta$ – мало (или эквивалентную предельную норму $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}} \| Q(t) \| \leq \delta$).

Чтобы оценить точные верхнюю $\Omega'(A) = \lim\limits_{\delta\to+0} \sup\limits_{\|Q(t)\|\leq\delta} \lambda_n(A+Q)$ и нижнюю $\omega'(A) = \lim\limits_{\delta\to+0} \inf\limits_{\|Q(t)\|\leq\delta} \lambda_1(A+Q)$ предельные границы изменения соответственно старшего $\lambda_n(A + Q)$ и младшего $\lambda_1(A + Q)$ характеристических показателей возмущенной системы (1_{A+Q}) (в случае $\varepsilon = 1$), Р. Э. Виноградом [1; 2] введены понятия младшего $\omega(A)$ и старшего $\Omega(A)$ центральных показателей системы (1_A) и построены формулы их вычисления по матрице Коши $X_A(t, \tau)$:

$$\begin{aligned} \omega(A) &= \lim_{T\to+\infty} \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{mT} \sum_{k=1}^{m} \ln \| X_A^{-1}(kT, kT-T) \|^{-1}, \\ \Omega(A) &= \lim_{T\to+\infty} \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{mT} \sum_{k=1}^{m} \ln \| X_A(kT, kT-T) \|. \end{aligned} \tag{2}$$

Позднее В. М. Миллионщиковым [3] была доказана их достижимость.

Для исследования равномерной экспоненциальной устойчивости и неустойчивости дифференциальных систем по линейному приближению используются младший $\omega_0(A)$ и старший $\Omega_0(A)$ особые (генеральные) показатели линейной системы (1_A):

$$\begin{aligned} \omega_0(A) &= \lim_{T\to+\infty} \underline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{T} \ln \| X_A(kT-T, kT) \|^{-1}, \\ \Omega_0(A) &= \lim_{T\to+\infty} \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{T} \ln \| X_A(kT, kT-T) \|, \end{aligned} \tag{3}$$

введенные П. Болем [4] (и независимо от него К. П. Персидским [5]).

В случае отрицательности старшего центрального $\Omega(A)$ (или старшего особого $\Omega_0(A)$) показателя системы (1_A) нулевое решение возмущенной системы (1_{A+Q}) с достаточно малым по норме на полуоси $[0,+\infty)$ возмущением Q будет экспоненциально устойчиво (см., напр., [6, с. 50, 108; 7, с. 45, 108]), и тем самым справедливо свойство $y(t)\to 0$ при $t\to+\infty$ для всех решений системы (1_{A+Q}).

Заметим, что свойства центральных и особых показателей линейных дискретных систем изучались в работах А. Чорника [8; 9].

Возникают, в частности, два вопроса:

1) существуют ли такие системы (1_A) с кусочно-непрерывными ограниченными коэффициентами и отрицательными старшими центральными показателями $\Omega(A)$ (или отрицательными старшими особыми показателями $\Omega_0(A)$), что старшие центральные $\Omega(A/\varepsilon)$ (или особые $\Omega_0(A/\varepsilon)$) показатели систем $(1_{A/\varepsilon})$ при некоторых значениях $\varepsilon\in(0,1]$ оказываются положительными;

2) в случае отрицательного ответа на первый вопрос, существуют ли такие системы (1_A) с кусочно-непрерывными ограниченными коэффициентами и старшими центральными и особыми показателями $\Omega(A)=\Omega_0(A)=\varepsilon\Omega(A/\varepsilon)=\varepsilon\Omega_0(A/\varepsilon)<0$, а также как угодно малое на полуоси $[0,+\infty)$ возмущение Q, что старшие центральные $\Omega((A+Q)/\varepsilon)$ (или особые $\Omega_0((A+Q)/\varepsilon)$) показатели оказываются положительными при некоторых значениях $\varepsilon\in(0,1]$ (или даже их счетном числе).

Ответ на первый поставленный вопрос дает теорема 1.

Теорема 1. *Для произвольных чисел $M>0$, $\Omega\in(-M/3,0)$ существуют:*

1) двумерная система (1_A) с кусочно-непрерывной ограниченной матрицей коэффициентов $A(t)$, $\|A(t)\|\le M$, $\forall t\ge 0$;

2) две последовательности $\{\varepsilon_m\}\downarrow+0$ и $\{\varepsilon'_m\}\downarrow+0$, $m\in\mathbb{N}$, значений параметра $\varepsilon>0$, такие, что исходная система (1_A) имеет совпадающие старший центральный $\Omega(A)$ и старший особый $\Omega_0(A)$ показатели $\Omega(A)=\Omega_0(A)=\Omega$, а старшие центральный $\Omega(A/\varepsilon)$ и особый $\Omega_0(A/\varepsilon)$ показатели сингулярной системы $(1_{A/\varepsilon})$ одновременно оказываются положительными и отделенными от нуля на счетном множестве значений параметра $\varepsilon=\varepsilon_m$ и отрицательными на другом счетном множестве значений параметра $\varepsilon=\varepsilon'_m$ для каждого фиксированного натурального m.

Схема доказательства. Для построения линейной системы по заданным в условии теоремы числам $M>0$ и $\Omega\in(-M/3,0)$ определяем величины

$$a=M+3\Omega,\ b=M,\ \Delta=\frac{2\pi}{M},\ \omega=\frac{6\pi}{M}. \tag{4}$$

При таком определении справедливы неравенства

$$0<a<b\le M,\ 0<\Delta<\omega, \tag{5}$$

а выражение $(a-b)\dfrac{\omega-\Delta}{2\omega}$ оказывается равным заданному значению Ω. С помощью величин a, b, Δ, ω, определенных равенствами (4), теперь можно определить элементы 2×2-матрицы коэффициентов $A(t)$ линейной системы (1_A):

$$a_{11}(t)=\begin{cases}0, & t\in[(2k+1)\omega-\Delta,(2k+1)\omega)\cup[(2k+2)\omega-\Delta,(2k+2)\omega),\\ a, & t\in[2k\omega,(2k+1)\omega-\Delta),\\ -b, & t\in[(2k+1)\omega,(2k+2)\omega-\Delta),\end{cases}$$

$$a_{22}(t)=a_{11}(t)\frac{a^2(a_{11}(t)-a)-b^2(a_{11}(t)+b)}{ab(a+b)},$$

$$a_{21}(t)=-a_{12}(t)=\begin{cases}M, & t\in[(2k+1)\omega-\Delta,(2k+1)\omega)\cup[(2k+2)\omega-\Delta,(2k+2)\omega),\\ 0, & t\in[2k\omega,(2k+1)\omega-\Delta)\cup[(2k+1)\omega,(2k+2)\omega-\Delta),\end{cases}$$

где $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Из неравенств (5) следует, что при таком определении коэффициентов построенной системы выполнено необходимое условие $\|A(t)\|\le M$, $\forall t\ge 0$.

Вычисляя непосредственно по формулам (2), (3), получаем, что старший центральный и старший особый показатели построенной системы оказываются равными заданному числу

$$\Omega(A)=\Omega_0(A)=(a-b)\frac{\omega-\Delta}{2\omega}=\Omega<0.$$

Если же теперь рассматривать соответствующую сингулярную возмущенную систему ($1_{A/\varepsilon}$), то непосредственными вычислениями получаем, что для значений параметра $\varepsilon = \varepsilon_m = 2\Delta M / (\pi + 4\pi m) \xrightarrow[m\to+\infty]{} +0,\ m \in \mathbb{N}$, старшие центральный и особый показатели построенной системы ($1_{A/\varepsilon_m}$) оказываются положительными и отделенными от нуля:

$$\Omega(A/\varepsilon_m) = \Omega_0(A/\varepsilon_m) = \frac{2}{3}\frac{a}{\varepsilon_m} > 0,$$

а для значений параметра ε при производной, взятых из последовательности $\varepsilon'_m = (2m+1)^{-1}\pi^{-1}\Delta M \xrightarrow[m\to+\infty]{} +0,\ m \in \mathbb{N}$, старшие центральный и особый показатели построенной системы ($1_{A/\varepsilon_m}$) отрицательны:

$$\Omega(A/\varepsilon'_m) = \Omega_0(A/\varepsilon'_m) = \varepsilon'^{-1}_m \Omega < 0.$$

Теорема 1 доказана.

З а м е ч а н и е 1. *Можно показать, что младшие центральный* $\omega(A/\varepsilon)$ *и особый* $\omega_0(A/\varepsilon)$ *показатели линейной системы, построенной при доказательстве теоремы 1, отрицательны на указанных множествах значений параметра* ε*:*

$$\omega(A/\varepsilon) = \omega_0(A/\varepsilon) = -(2/3)\varepsilon^{-1}M < 0,\ \ \varepsilon \in \{\varepsilon_m\} \cup \{\varepsilon'_m\} \cup \{1\}.$$

Положительный ответ на второй вопрос содержит

Т е о р е м а 2. *Для произвольных чисел* $M > 0$ *и* $\Omega \in (-M/3, 0)$ *существуют:*

1) двумерная система (1_A) *с кусочно-непрерывной ограниченной матрицей коэффициентов* $A(t)$, $\|A(t)\| \le M$, *и отрицательными старшим центральным* $\Omega(A)$ *и старшим особым* $\Omega_0(A)$ *показателями* $\Omega(A) = \Omega_0(A) = \Omega < 0$, *а также отрицательными показателями* $\Omega(A) = \Omega_0(A) = \varepsilon\Omega(A/\varepsilon) = \varepsilon\Omega_0(A/\varepsilon) = \varepsilon\Omega < 0$ *соответствующей сингулярной системы* ($1_{A/\varepsilon}$) *при всех значениях* $\varepsilon > 0$*;*

2) кусочно-непрерывное возмущение $Q(\cdot)$ *с нормой* $\|Q(t)\| \le \delta,\ \forall t \ge 0$, *при любом как угодно малом* $\delta > 0$ *и последовательность* $\{\varepsilon_m\} \downarrow 0$ *такие, что сингулярная возмущенная система* ($1_{(A+Q)/\varepsilon}$) *имеет старшие центральный* $\Omega((A+Q)/\varepsilon)$ *и особый* $\Omega_0((A+Q)/\varepsilon)$ *показатели, которые одновременно оказываются положительными и отделенными от нуля на счетном множестве значений параметра* $\varepsilon = \varepsilon_m$ *для каждого фиксированного натурального* m.

С х е м а д о к а з а т е л ь с т в а. Выбираем произвольные числа $\Delta > 0$ и $\delta > 0$, а числа a, b, ω определяем следующим образом:

$$a = M + 3\Omega > 0,\ \ b = M > 0,\ \ \omega = 3\Delta.$$

В силу такого определения значение выражения $\frac{1}{2}(a-b)\left(1-\frac{\Delta}{\omega}\right)$ находится в пределах от $-M/3$ до нуля и обеспечивается выполнение равенства $\frac{1}{2}(a-b)\left(1-\frac{\Delta}{\omega}\right) = \Omega \in (-M/3, 0)$.

Определим элементы матрицы коэффициентов $A(t) = \operatorname{diag}[a_1(t), a_2(t)]$ исходной системы (1_A):

$$a_1(t) = \begin{cases} 0, & t \in [(2k+1)\omega - \Delta, (2k+1)\omega) \cup [(2k+2)\omega - \Delta, (2k+2)\omega), \\ a, & t \in [2k\omega, (2k+1)\omega - \Delta), \\ -b, & t \in [(2k+1)\omega, (2k+2)\omega - \Delta), \end{cases}$$

$$a_2(t) = \begin{cases} 0, & t \in [(2k+1)\omega - \Delta, (2k+1)\omega) \cup [(2k+2)\omega - \Delta, (2k+2)\omega), \\ b, & t \in [2k\omega, (2k+1)\omega - \Delta), \\ -a, & t \in [(2k+1)\omega, (2k+2)\omega - \Delta), \end{cases}$$

где $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Непосредственными вычислениями по формулам (2), (3) получаем, что старший центральный и старший особый показатели построенной системы оказываются равными заданному числу

$$\Omega(A) = \Omega_0(A) = \frac{1}{2}(a-b)\left(1-\frac{\Delta}{\omega}\right) = \Omega < 0,$$

а поэтому характеристические показатели $\lambda_1(A)$ и $\lambda_2(A)$ этой системы также будут отрицательными [6, с. 108]. Поскольку построенная система (1_A) диагональна, то соответствующая сингулярная система ($1_{A/\varepsilon}$) имеет характеристические показатели $\lambda_i(A/\varepsilon) = \varepsilon^{-1}\lambda_i(A) < 0, i = 1, 2,$ и является асимптотически устойчивой. Для этой же диагональной системы отрицательными оказываются и старшие центральный и особый показатели, вычисленные по формулам (2), (3):

$$\Omega(A/\varepsilon) = \lim_{T\to+0} \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{mT}\sum_{k=1}^{m} \ln\| X_{A/\varepsilon}(kT, kT-T)\| =$$

$$\lim_{T\to+0} \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{mT}\sum_{k=1}^{m} \varepsilon^{-1}\ln\| X_{A}(kT, kT-T)\| = \Omega(A)/\varepsilon = \Omega/\varepsilon < 0 \xrightarrow[\varepsilon\to+0]{} -\infty,$$

$$\Omega_0(A/\varepsilon) = \lim_{T\to+\infty} \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{T}\ln\| X_{A/\varepsilon}(kT, kT-T)\| =$$

$$\lim_{T\to+\infty} \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{\varepsilon T}\ln\| X_{A}(kT, kT-T)\| = \Omega_0(A)/\varepsilon = \Omega/\varepsilon < 0 \xrightarrow[\varepsilon\to+0]{} -\infty.$$

Матрицу возмущений $Q(t)$ полагаем равной $\begin{pmatrix} 0 & -\delta \\ \delta & 0 \end{pmatrix}$ при $t \in [k\omega - \Delta, k\omega)$, $k \in \mathbb{N}$, и нулевой на остальных промежутках времени. При этом обеспечивается выполнение неравенства $\| Q(t)\| \le \delta, \forall t \ge 0.$

Непосредственными вычислениями можно убедиться, что для системы ($1_{(A+Q)/\varepsilon}$), построенной таким образом, характеристический показатель $\lambda[y]$ решения $y(t, y_0, \varepsilon)$, $y(0, y_0, \varepsilon) = [1, 0]^T$, где $\varepsilon = \varepsilon_m = \dfrac{2\Delta\delta}{\pi + 4\pi m} \xrightarrow[m\to+\infty]{} +0$, $m \in \mathbb{N}$, имеет представление $\lambda[y] = (2/3)\varepsilon^{-1}a > 0$. Поэтому старший характеристический показатель $\lambda_2((A+Q)/\varepsilon_m)$ этой системы положителен и отделен от нуля.

По указанной при доказательстве теоремы 2 последовательности $\{\varepsilon_m\} \downarrow 0$ можно сделать вывод о положительности верхней предельной границы изменения старшего характеристического показателя сингулярной возмущенной системы ($1_{(A+Q)/\varepsilon_m}$), а следовательно, и о положительности старшего центрального $\Omega((A+Q)/\varepsilon_m)$ и старшего особого $\Omega_0((A+Q)/\varepsilon_m)$ показателей. Непосредственными вычислениями по формулам (2) и (3), примененными к линейной системе с матрицей коэффициентов $\varepsilon_m^{-1}(A+Q)$, также получаем $\Omega((A+Q)/\varepsilon_m) = \Omega_0((A+Q)/\varepsilon_m) = (2/3)\varepsilon^{-1}a > 0.$ Теорема 2 доказана.

Замечание 2. *Коэффициенты систем, построенных при доказательстве теорем 1 и 2, можно сделать бесконечно дифференцируемыми.*

Замечание 3. *Эффект одновременной смены знака старшего центрального и старшего особого показателей под действием малых возмущений на бесконечном (счетном) числе значений малого положительного параметра при производной, выявленный в настоящей работе для двумерных линейных сингулярных дифференциальных систем, можно обобщить и на случай систем произвольной размерности.*

Литература

1. *Виноград Р. Э.* // Мат. сб. 1957. Т. 42, № 2. С. 207–222.
2. *Виноград Р. Э.* // Докл. АН СССР. 1958. Т. 119, № 4. С. 633–635.
3. *Миллионщиков В. М.* // Сиб. мат. журн. 1969. Т. 10, № 1. С. 99–104.
4. *Bohl P.* Über Differentialgleichugen // J. reine und angew. Math. 1913. Bd. 144. S. 284–318.
5. *Персидский К. П.* // Мат. сб. 1933. Т. 40, № 3. С. 284–292.
6. *Изобов Н. А.* Введение в теорию показателей Ляпунова. Минск, 2006. – 319 с.
7. *Izobov N. A.* Lyapunov exponents and stability. Cambridge Scientific Publishers, 2012. – 353 p.
8. *Czornik A., Niezabitowski M.* // Nonlinear Analysis: Hybrid Systems. 2013. Vol. 9. P. 27–41.
9. *Czornik A., Nawrat A., Niezabitowski M.* // Studies in Computational Intelligence, vol. 440. Advanced Technologies for Intelligent Systems of National Border Security. 2013. P. 29–44.

S. G. KRASOVSKII

kras@im.bas-net.by

SIGN CHANGING OF THE CENTRAL EXPONENT AND THE GENERAL EXPONENT OF LINEAR SINGULAR SYSTEMS

Summary

The existence of 2D linear differential systems with bounded piecewise continuous coefficients and a negative senior general exponent, such that the higher central exponent of the corresponding singular system is positive on a countable set of values of the positive parameter under derivative, is proved. Also, the existence of 2D linear singular differential systems with the effect of sign changing of the higher central exponent and the higher general exponent under small linear perturbations at an infinite number of small positive values for a parameter under derivative is proved. The result can be generalized to the case of systems of arbitrary dimension, and can be stated in the class of linear systems with infinitely differentiable coefficients.